# Funksiyalar

Kundalik turmushimizning deyarli barcha jabhalarida funksiyalarni uchratishimiz mumkin. Masalan institutda( har bir talabasi maxsus identifikatsion nomerga ega), fizikada sohasida (suyuqlik yoki gaz bilan to'ldirilgan biror idish ichidagi fazoning biror nuqtasidan oniy vaqt momentida o'tuvchi molekulalarning tezliklarini qo'shish mumkin) iqtisodiyot sohasida (har bir ish kunida birja bozorlarida maxsus tegli indekslar ishlatilishi) va hokazolar.
Funksiyaning matematik ta'rifi yuqoridagi barcha holatlarni qamrab oladi.

## 2.1 Ta'rif va dastlabki tushunchalar.

X va Y bo'sh bo'lmagan biror to'plamlar berilgan bo'lsin. Agar har bir $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ songa biror $\mathbf{f}$ qoidaga ko'ra bitta $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ son mos qo'yilgan bo'lsa, funksiya berilgan (aniqlangan) deyiladi va

$$f:\ to`plam\, f \subseteq X \to Y$$

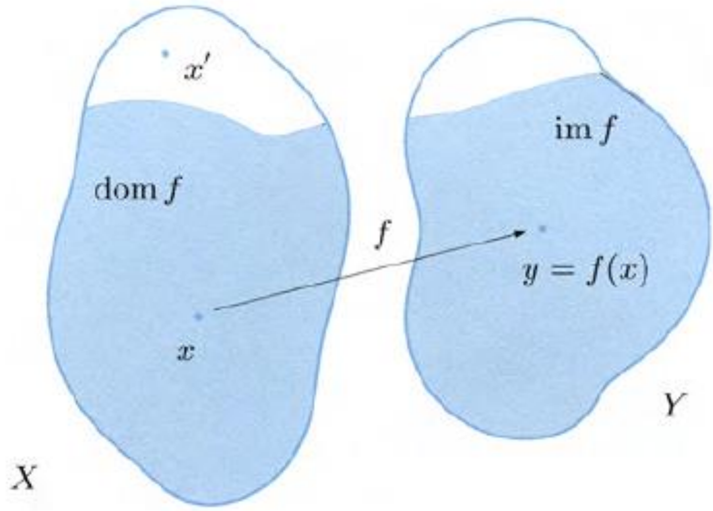
kabi belgilanadi. Bunda $\mathbf{X}$ funksiyaning aniqlanish to'plami (sohasi) deyilib, $\mathbf{x}$ ga **funksiya argumenti**, $\mathbf{y}$ ga esa $\mathbf{x}$ ning **funksiyasi** deyiladi.

Agar $to`plam\, f = X$ bo'lsa, $f$ to'plam $\mathbf{X}$ to'plamda aniqlangan deyiladi va $f : X \to Y$ kabi belgilanadi. Yuqoridagi akslantirishni quyidagicha ifodalash ham mumkin:

$$f : x \mapsto f(x)$$

Agar, $x$ - $f$ ning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lsa, unda X x Y Dekart koordinatalar sistemasida berilgan $\Gamma(f)$ qism toplamda $f$ graf aniqlangan deyiladi, ya'ni:

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in dom\, f\} \tag{2.1}$$




**2.1 – Rasm. Venn diagrammasi yordamida funksiya ifodasi**

Bundan so'ng toplam deganda ko'proq sonlar to'plamini tushinamiz. Agar $Y = R$, bo'lsa $f-$funksiya **haqiqiy** yoki **haqiqiy qiymatli** deyiladi. Agarda $X = R$, bo'lsa $f-$funksiya bir **haqiqiy o'zgaruvchili** funksiya deyiladi. O'z navbatida haqiqiy o'zgaruvchili funksiya grafi $R^2$ Dekart koordinatalar tekisligida yotadi.

$X = N$ hol esa, mahsus hol sifatida qaraladi, ya'ni $X$ to'plam o'z ichida $n_0 \geq 0$ natural sonlar uchun $\{n \in N : n \geq n_0\}$ qism to'plamini saqlaydi. Bunday funksiya ketma ketlik deb ataladi. Ketma-ketliklarni a(n) emas, balki $a_n$ deb belgilanadi; shu tariqa biz $a : n \mapsto a_n$ belgilashni qo'llaymiz. Ketma-ketlikni belgilashning yana bir keng tarqalgan ko'rinishi quyidagicha $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ $(n < n_0$ tashqari hollar uchungina) yoki $\{a_n\}$ dir.

**2.1 Misol**

Haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalardan bir nechtasini ko'rib chiqaylik:

**i)** $f : R \to R,\ f(x) = ax + b$ $(a,\ b$ haqiqiy koeffitsientlar), bu funksiyaning grafigi to'g'ri chiziqdir ( 2.2 rasm, yuqoridagi chapgi).

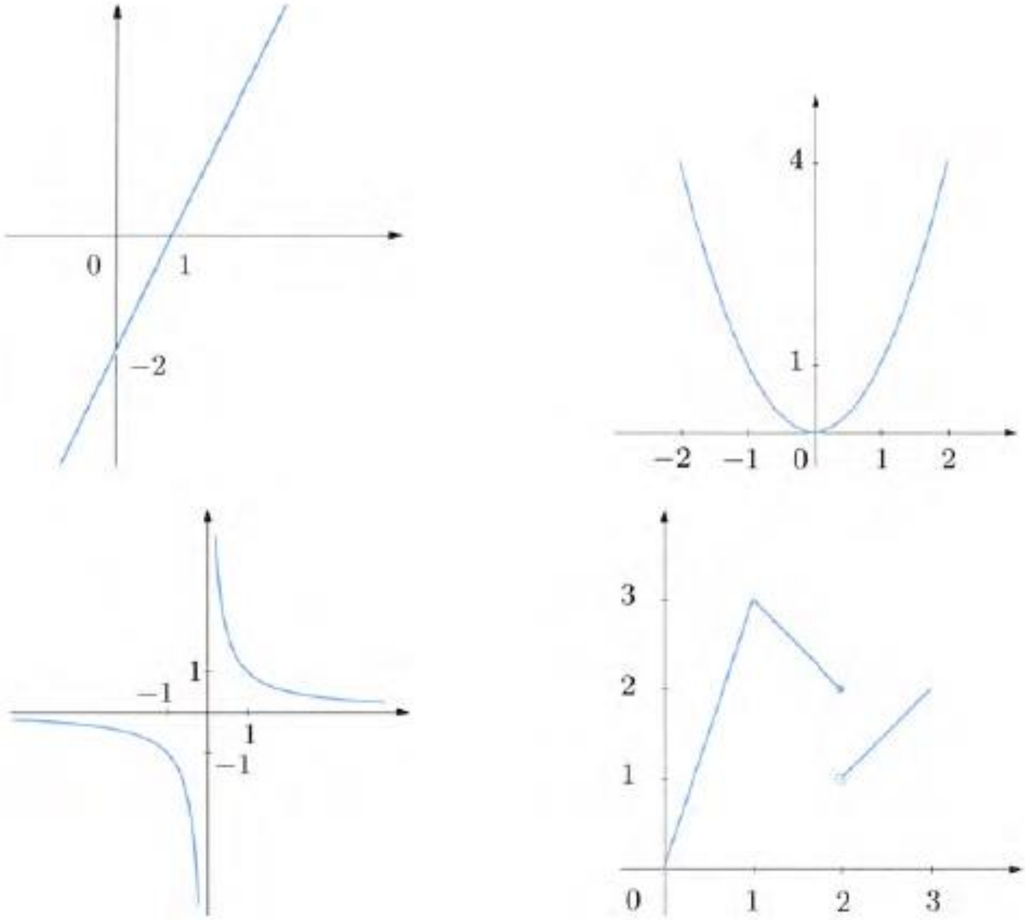
**ii)** $f : R \to R,\ f(x) = x^2$, funksiya grafigi paraboladan iborat. (2.2 rasm, yuqoridagi o'ngdagi).

**iii)** $f : R \setminus \{0\} \subset R \to R,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$ funksiya grafigi giperboladan iborat (2.2 rasm, pastdagi chapgi).

**iv)** haqiqiy o'zgaruvchili haqiqiy funksiay bir nechta oraliqlarda aniqlangan bo'lishi mumkin. Bunday funksiyani uzulish nuqtasiga ega shuning uchun bunday funksiyani **bo'lakli funksiya** deb ataymiz. Masalan:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & agar \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 4 - x & agar \quad 1 < x \leq 2, \\ x - 1 & agar \quad 2 < x \leq 3, \end{cases} \qquad (2.2)$$

(2.2 rasm pastki o'ngda funksiya grafigi keltirilgan).




**2.2 Rasm** Funksiya grafiklari

$f(x)=ax+b$ ( yuqoridan chapda), $f(x)=x^2$, (yuqoridan o'ngda),

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ (pastda chapgi), uzlukli funksiya ( pastda o'ngdagi)

bo'lakli funksiyalar ichida quyidagilari muhim ahamiyatga ega:

**V)** absalyut(modul) funksiya (2.3 – rasm, yuqoridan chapda)

$$f:R\to R,\ \ f(x)=|x|=\begin{cases} x & agar\ x\ge 0,\\ -x & agar\ \ x<0; \end{cases}$$

**VI)** **sign** funksiya (2.3 – rasm, yuqoridan o'ngda)

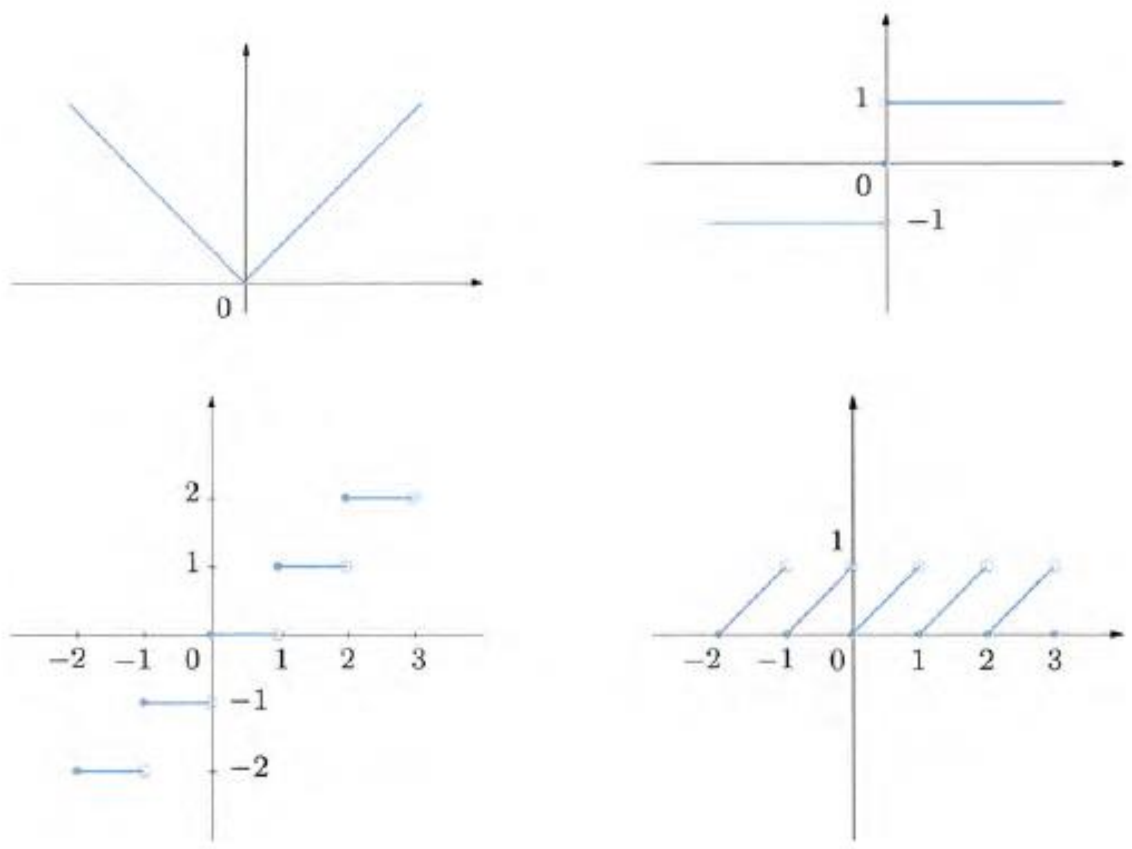
$$f:R\to Z,\ \ \ f(x)=\operatorname{sign}(x)=\begin{cases} +1 & agar\ x\ge 0,\\ 0 & agar\ \ x=0,\\ -1 & agar\ \ x<0; \end{cases}$$

**VII)** **sonning butun qismi** (2.3 – rasm, pastdan chapda)

$$f:R\to Z,\ \ \ f(x)=[x]=(x\le \text{butun qismi})$$

(masalan, $[4]=4,\left[\sqrt{2}\right]=1;[-1]=-1;\left[-\dfrac{3}{2}\right]=-2$);

$$[x]\le x<[x]+1,\qquad \forall x\in R;$$




**2.3 – Rasm.** Yuqori chap burchakdan soat strelkasi bo'ylab quyidafi funksiyalar grafiklari: absalyut funksiya, sign(x), sonning kasr va butun qismi funksiyalari.

**VIII) Mantissa** (2.3 – rasm, pastdan o'ngda)

$$f:R\to R,\ \ f(x)=M(x)=x-[x]$$

(funksiyaning qiymatlar sohasi $0 < M(x) < 1$ bo'ladi)

Endi bazi ketma-ketlikka doir misol ko'rib chiqaylik.

**IX)**
$$a_n=\frac{n}{n+1} \qquad (2.3)$$

Ketma-ketlik barcha $n\geq 0$ lar uchun aniqlangan. Dastlabki bir nechtasini hisoblaylik

$$a_0=0;\quad a_1=\frac{1}{2}=0,5;\quad a_2=\frac{2}{3}=0,6;\quad a_3=\frac{3}{4}=0,75$$

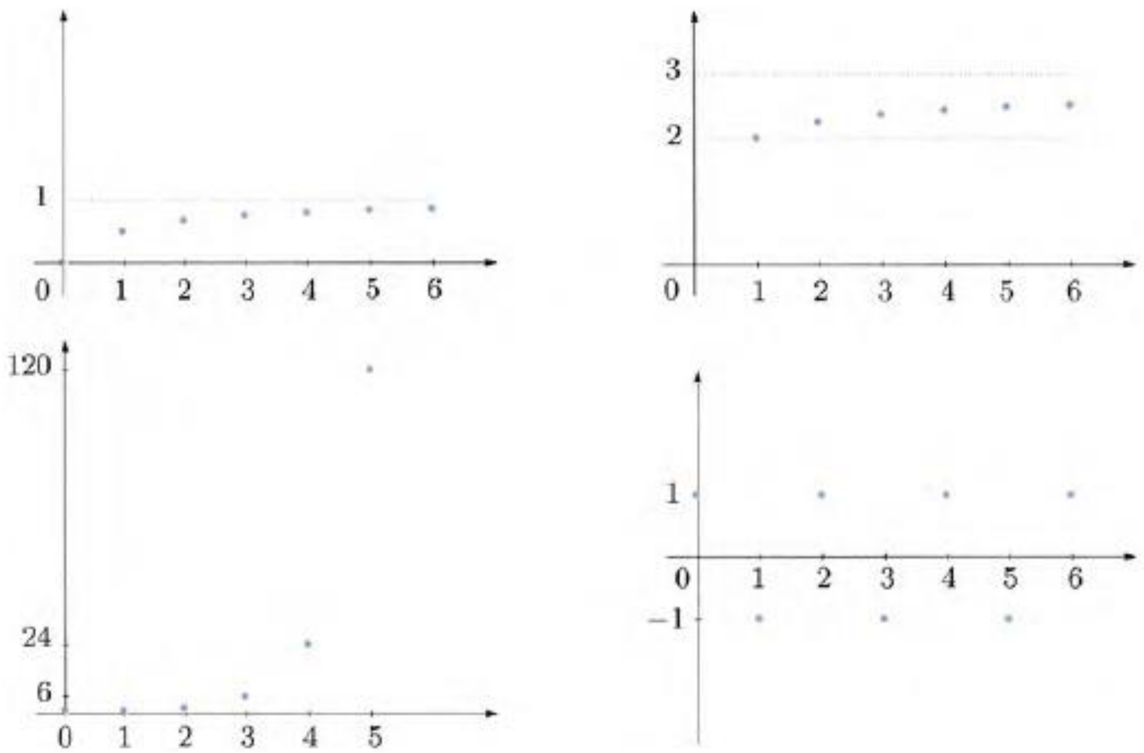
Uning grafigi 2.4 – rasmda (yuqoridan chapda) tasvirlangan.

**X)**
$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (2.4)$$

Ketma-ketlik barcha $n\geq 1$ lar uchun aniqlangan. Dastlabki bir nechtasini hisoblaylik

$$a_1=2;\quad a_2=\frac{9}{4}=2,25;\quad a_3=\frac{64}{27}=2,37\overline{037},\ a_4=\frac{625}{256}=2,44140625.$$

Uning grafigi 2.4 – rasmda (yuqoridan o'ngda) tasvirlangan.




**2.4 - Rasm.** Soat strelkasi bo'ylab: (2.3), (2.4), (2.6), (2.5)- ketma-ketliklarning grafiglari.

**XI)** $$a_n = n! \qquad (2.3)$$

Ketma-ketlik *n* sonning **faktorial**idir. Bu ketma-ketlik grafigi 2.4-rasmda (pastdan chapda) tasvirlangan; bu ketma-ketlik qiymatlari juda tez o'sganligi uchun chizmani ifodalashda koordinatalar tekisligida turli birliklardan foydalandik.

**XI)** $$a_n = (-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{agar } n \text{ juft} \\ -1 & \text{agar } n \text{ toq} \end{cases} \qquad (2.3)$$

N ga mos holda +1 va -1 qiymatlarni qabul qiladi. Bu ketma-ketlik grafigi 2.4-rasmda (pastdan o'ngda) tasvirlangan;

Nihoyat, $R^2$ sohada aniqlangan ikki o'zgaruvchili funksiyalarga misol keltiramiz:

**XIII) Funksiya**

$$f : R^2 \to R, \quad f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Tekislikda berilgan $(x,y)$ koordinataga ega P nuqtadan koordinatalar boshigacha bo'lgan masofani aniqlaydi.

**XIV) Funksiya**

$$f : R^2 \to R, \quad f(x,y) = (y,x)$$

Dekart koordinatalar tekisligida berilgan $(x,y)$ koordinataga ega $P$ nuqtani birinchi va uchunchi choraklar bissektrissasiga nisbattan simmetrik bo'lgan $P'$ nuqtaga akslantiradi.

$XOY$ koordinatalar tekisligini olaylik. $X$ - funksiyaning aniqlanish sohasi va $Y$ qiymatlar to'plami sifatida qaraladi. $X$ to'plamdan olingan har bir element uchun unga mos yagona $Y$ aniqlanadi. Masalan *x,y,z,t haqiqiy elementlar* biror to'plamga tegishli bo'lsa $y = f(x) = 3x,\ x = f(y),\ z = f(t) = 3t$ funksiyalar aynan shu elementlarni boshqa bir to'plamga akslantiradi, yana ham aniqrog'i uchga ko'paytirib akslantiradi.

## 2.2 Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar

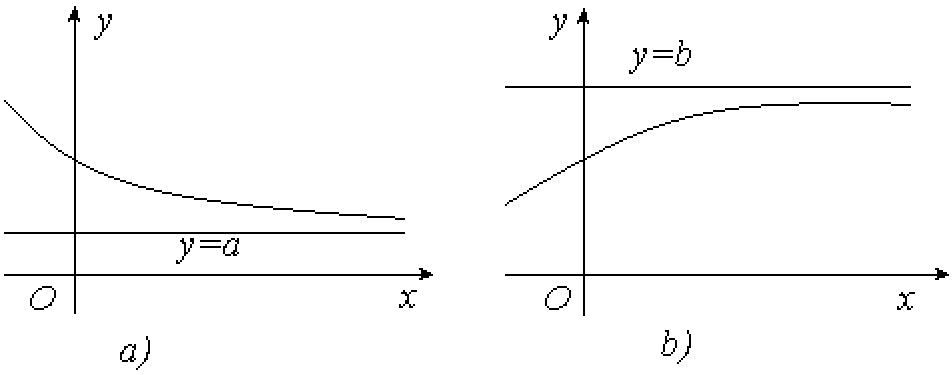
Bizga oldindan ma'lum bo'lgan infimum, supremum, maksimum va minimum tushunchalari ("sup" va "inf" lar lotincha "supremum" va "infimum" so'zlaridan olingan bo'lib, ular mos ravishda eng yuqori, eng quyi degan ma'nolarni anglatadi)ni endi to'plam funksiya orqali keltirib o'tamiz.

**1-ta'rif.** a) Agar $f(x)$ funksiya $X$ to'plamda aniqlangan bo'lib, uning qiymatlar to'plami $E(f)=\{f(x):\ x\in X\}$ yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $X$ to'plamda ***yuqoridan chegaralangan*** deyiladi. Demak, shunday $b$ son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x\in X$ lar uchun $f(x)\le b$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya yuqoridan chegaralangan bo'ladi.

b) Agar $f(x)$ funksiya $X$ to'plamda aniqlangan bo'lib, uning qiymatlar to'plami $E(f)=\{f(x):\ x\in X\}$ quyidan chegaralangan bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $X$ to'plamda ***quyidan chegaralangan*** deyiladi. Demak, shunday $b$ son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x\in X$ lar uchun $f(x)\ge b$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya quyidan chegaralangan bo'ladi.

**2-ta'rif.** Agar $f(x)$ funksiya $X$ to'plamda ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u shu to'plamda ***chegaralangan*** funksiya deyiladi.

Yuqoridan chegaralangan funksiyaning grafigi, biror to'g'ri chiziqdan pastda (2.5 -*a*) rasm), quyidan chegaralangan funksiyaning grafigi biror to'g'ri chiziqdan yuqorida joylashgan bo'ladi. (2.5 -b) rasm).




**2.5- rasm**

**3-ta'rif.** Agar $y=f(x)$ funksiyaning qiymatlar to'plami $E(f)$ yuqoridan (quyidan) chegaralanmagan bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya yuqoridan (quyidan) ***chegaralanmagan*** deyiladi.

1-*misol*. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ funksiya $X=(-\infty;+\infty)$ da chegaralangan, chunki $E(f)=(0;1]$ chegaralangan to'plam.

2- *misol*. $f(x)=sinx$ chegaralangan funksiya.

3-*misol*. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ funksiya $X=(0;5)$ da chegaralanmagan, chunki $E(f)=(0,2;+\infty)$ chegaralanmagan to'plam.

4-*misol*. $f(x)=lgx$ funksiya $X=(0;+\infty)$ da chegaralanmagan, chunki $E(f)=$ $=(-\infty;+\infty)$ chegaralanmagan to'plam.

$A_3$ - barcha to'g'ri kasrlar to'plami, chegaralangan to'plam bo'ladi. Bu to'plam uchun $infA_3=0$, $supA_3=1$.

## 2.3 Teskari funksiya

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $X$ to'plamda berilgan bo'lib, $Y=E(f)=\{f(x): x\in X\}$ uning qiymatlar to'plami bo'lsin. Endi $Y$ to'plamni $X$ to'plamga akslantiruvchi funksiya, ya'ni teskari funksiya bor yoki yo'qligini tekshiramiz. $Y$ to'plamdan olingan ixtiyoriy $y_o$ uchun, X to'plamda $y_o=f(x_o)$ tenglikni qanoatlantiruvchi $x_o$ soni mavjud. Bunday son bitta, yoki bir nechta bo'lishi mumkin.

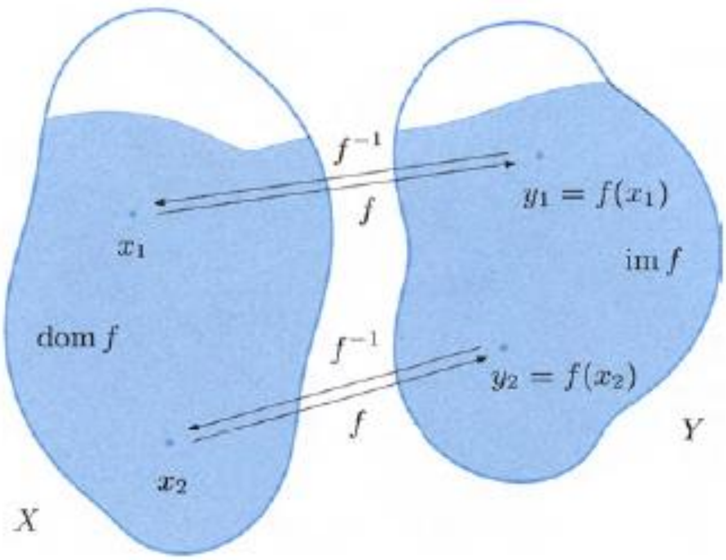
Agar $Y$ dan olingan har bir $y$ uchun $X$ to‘plamda $y=f(x)$ tenglikni qanoatlantiruvchi $x$ faqat bitta bo‘lsa, u holda $x=\varphi(y)$ funksiyaga ega bo‘lamiz. Bu funksiya $y=f(x)$ funksiyaga ***teskari funksiya*** deyiladi.

Masalan, $X=Y=(-\infty;+\infty)$ da berilgan $y=\sqrt[3]{x}$ funksiya $x=y^3$ funksiyaga teskari funksiya bo‘ladi.

Ba’zan, $y=f(x)$ funksiyaga teskari funksiyani $x=f^{-1}(y)$ kabi ham belgilashadi.

Agar $x=\varphi(y)$ funksiya $y=f(x)$ funksiyaga teskari funksiya bo‘lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya $x=\varphi(y)$ funksiyaga teskari funksiya bo‘ladi. Shu sababli, bu ikki funksiyani ***o‘zaro teskari funksiyalar*** deyiladi.

Ma’lumki, $y=f(x)$ funksiyada $x$ argument, $y$ funksiya deb yuritiladi. Unga teskari bo‘lgan $x=\varphi(y)$ funksiyada $x$ va $y$ lar o‘rnini almashtirib $y=\varphi(x)$ funksiyaga ega bo‘lamiz. Shunday qilib, bir xil belgilash bo‘lganda ham, $y=\varphi(x)$ funksiya $y=f(x)$ funksiyaga teskari funksiya deb qaraladi.



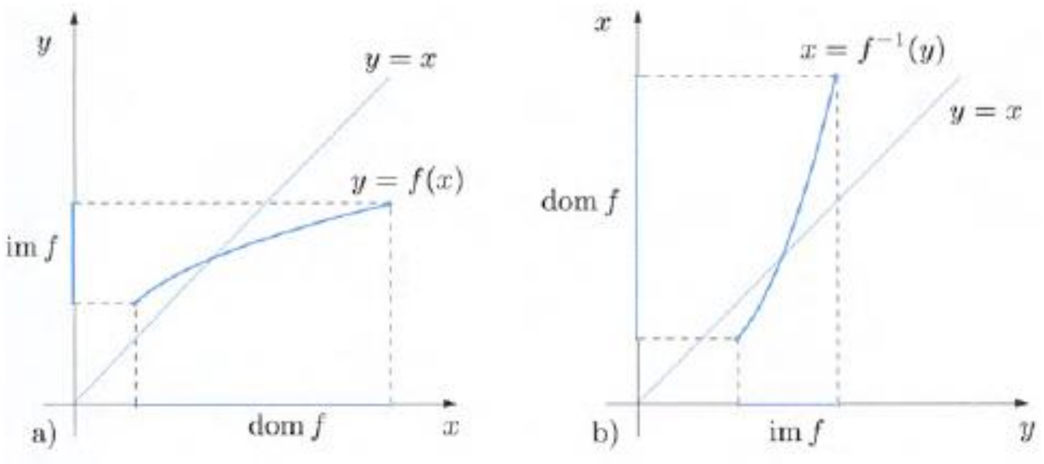

**2.6 - rasm.** O’zaro teskari funksiyalarning ifodalanishi.

Aytaylik $y=f(x)$ va $y=\varphi(x)$ funksiyalar berilgan bo‘lsin. Agar $f(\varphi(x))=x$ va $\varphi(f(x))=x$ tengliklar o‘rinli bo‘lsa, u holda $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar o‘zaro teskari funksiyalar bo‘ladi.

Masalan, $y=3x-1$ va $y=\frac{1}{3}(x+1)$ berilgan bo‘lsin. U holda

$(3\cdot\frac{1}{3}(x+1)-1)=x$ va $\frac{1}{3}((3x-1)+1)=x$ munosabatlarga ko‘ra bu ikki funksiya o‘zaro teskari funksiyalar ekan.

O’zaro teskari $y=f(x)$ va $y=\varphi(x)$ funksiyalarlarning grafiklari, $y=x$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘ladi




**2.7 – Rasm .** O’zaro teskari funksiyalarlar grafiklari

**2.5 Misol**

**I)** $f:R\to R$, $f(x)=ax+b$ funksiyaga barcha $a\neq 0$ lar uchun

$x=f^{-1}(y)=\frac{y-b}{a}$ yoki $y=f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$ teskari funksiya mavjud.

**II)** $f:R\to R$, $f(x)=x^2$ funksiyaga ixtiyoriy x lar uchun yagona teskari funksiya mavjud emas, chunki $f(x)=f(-x)$ va faqat $x\in[0;+\infty)$ yarim intervalda $y=x^2$ “kvadrat funksiya” $y=\sqrt{x}$ “kvadrat ildiz”li teskari funksiyaga ega bo’ladi.

**III)** $f:R\to R$, $f(x)=x^3$ funksiyaga bir qiymatli. Ya’ni ixtiyoriy $f(x_1)=f(x_2)$ shartdan quyidagi tenglik o’rinli ekanligi kelib chiqadi:

$x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=0\Rightarrow x_1=x_2$ shuningdek barcha $x_1\neq x_2$ lar uchun $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\frac{1}{2}\left[x_1^2+x_2^2+(x_1+x_2)^2\right]>0$. Demak “kubik ildizli” teskari funksiya $y=\sqrt[3]{x}$ barcha haqiqiy sonlar uchun aniqlangan.

### 2.4. Monoton funksiyalar.

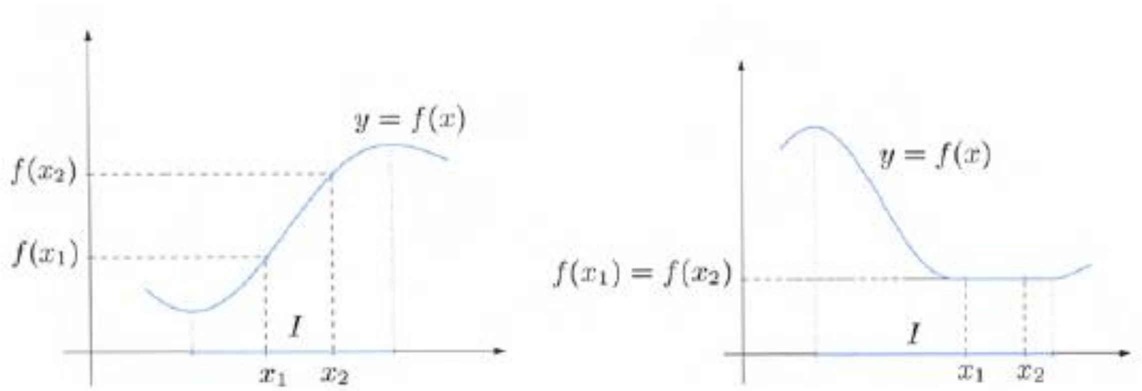
Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $X$ to‘plamda berilgan bo‘lsin.

**2.6 Ta’rif.** Agar $X$ to‘plamda olingan ixtiyoriy $x_1$ va $x_2$ lar uchun $x_1<x_2$ tengsizlikdan $f(x_1)\le f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiya $X$ to‘plamda ***kamaymaydigan*** funksiya deyiladi. Buni quyidagicha ifodalashimiz mumkin:

$$\forall x_1, x_2 \in X, \qquad x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \le f(x_2) \qquad (2.7)$$

Agar $X$ to‘plamdan olingan ixtiyoriy $x_1$ va $x_2$ lar uchun $x_1<x_2$ tengsizlikdan $f(x_1)<f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda funksiya $X$ to‘plamda ***qat’iy o‘suvchi*** deb ataladi.

$$\forall x_1, x_2 \in X, \qquad x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2) \qquad (2.8)$$




**2.8- rasm.** X intervalda o’suvchi(chapda) va kamaymaydigan(o’ngda) funksiya.

Agar X intervalda funksiya (qat’iy) o’suvchi yoki (qat’iy) kamayuvchi bo’lsa, unda funksiya shu intervalda **(qat’iy) monoton** deyiladi.

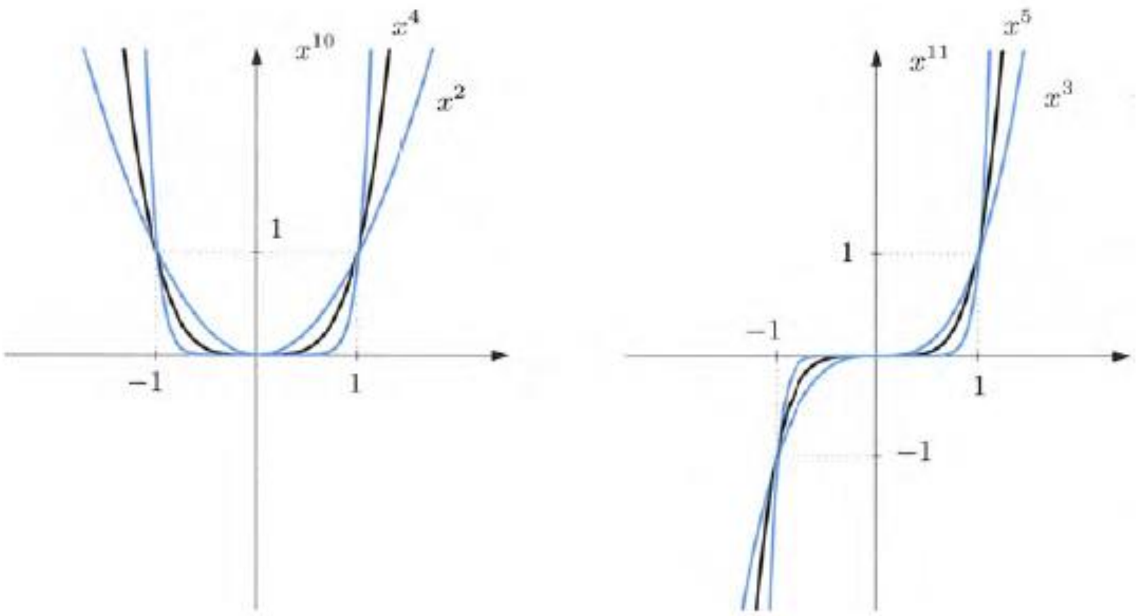
**2.7 - Misol**

**I)** $f:R\to R$, $f(x)=ax+b$ funksiya barcha $a>0$lar uchun o’suvchi, $a<0$ lar uchun kamayuvchi va $a=0$ da o’zgarmas funksiya bo’ladi

**II)** $f:R\to R$, $f(x)=x^2$ funksiya $x\in[0,+\infty)$ da o’suvchi funksiya $x\in(-\infty;0]$da esa kamayuvchi bo’ladi. Xuddi shunday barcha $n\ge 4$ lar uchun $y=x^n$ funksiya ham xuddi shu tartibdagi monotonlikka ega (2.9 –rasm chapda)

**III)** $f:R\to R$, $f(x)=x^3$ funksiya barcha ***R*** haqiqiy sonlar to’plamida o’suvchi funksiyadir (2.9-rasm o’ngda).

**IV)** 2.1- misoldagi $y=[x]$ va $y=\text{sign}(x)$ funksiyalar esa ***R*** da o'suvchi(qat'iy o'suvchi bo'lmasa ham). X sonning mantissasi $y=M(x)$ R da monoton emas, biroq u har bir $[n,n+1), n\in Z$ oraliqda qat'iy o'sadi.




**2.9 – Rasm.** $y=x^n$ funksiyaning n- juft bo'ganda(chapda), n- toq bo'lganda(o'ngda) grafigi.

Endi sodda lekin muhim bo'lgan teoremani keltiramiz

**Teorema 2.8. Agar** $f(x)$ biror oraliqda qat'iy monoton bo'lsa, unda $f(x)$ bir qiymatli (sodda) funksiya deyiladi.

**Isbot**: $f(x)$ funksiya qat'y o'suvchi deb faraz qilaylik. $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli shunday $x_1, x_2$ larni olaylikki, ular uchun yoki $x_1 > x_2$ shart bajarilsin. (2.8) ni inobatga olsak $f(x_1) < f(x_2)$ tenglikka ega bo'lamiz va bundan $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ikkinchi holat uchun ham xuddi yuqoridagi kabi natija olinadi.

Xuddi shunday kamayuvchi(o'smaydigan) funksiya uchun ta'riflarni keltirish mumkin.

Agar *X* to'plamda olingan ixtiyoriy $x_1$ va $x_2$ lar uchun $x_1<x_2$ tengsizlikdan $f(x_1)>f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiya *X* to'plamda ***kamayuvchi*** deb ataladi.

Agar $X$ to‘plamda olingan ixtiyoriy $x_1$ va $x_2$ lar uchun $x_1<x_2$ tengsizlikdan $f(x_1)\geq f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiya $X$ to‘plamda yoki ***o‘smaydigan*** funksiya deyiladi.

O’suvchi, kamayuvchi, kamaymaydigan, o‘smaydigan funksiyalar, bitta umumiy nom bilan ***monoton funksiyalar*** deyiladi.

### 3. Murakkab funksiya. Funksiyalar kompozitsiyasi.

Aytaylik, $u=\varphi(x)$ funksiya $X$ sohada aniqlangan va qiymatlar to‘plami $E(\varphi)$ bo‘lsin. Shuningdek, $y=f(u)$ funksiya $E(\varphi)$ to‘plamda aniqlangan bo‘lsa, u holda $y=f(\varphi(x))$ funksiya $X$ to‘plamda aniqlangan ***murakkab funksiya*** yoki $\varphi$ va $f$ ***funksiyalarning kompozitsiyasi*** deyiladi va $f\circ\varphi$ orqali belgilanadi:

$$\boxed{f\circ\varphi=f\left(\varphi(x)\right)} \qquad (2.9)$$

**2.9 – misol.**

Ikkita haqiqiy $y=f(x)=x-3$ va $z=g(y)=y^2+1$ bir o’zgaruvchili funksiyalarni olaylik. Bu ikki funksiyaning kombinatsiyasi $z=h(x)=g\circ f(x)=(x-3)^2+1$ kabi ifodalanadi.□

2.9 - ni inobatga olsak kompozitsion $g\circ f$ funksiyaning aniqlanish sohasi

$$x\in g\circ f \quad\Leftrightarrow\quad x\in\operatorname{dom} f \;\text{ va }\; f(x)\in\operatorname{dom} g$$

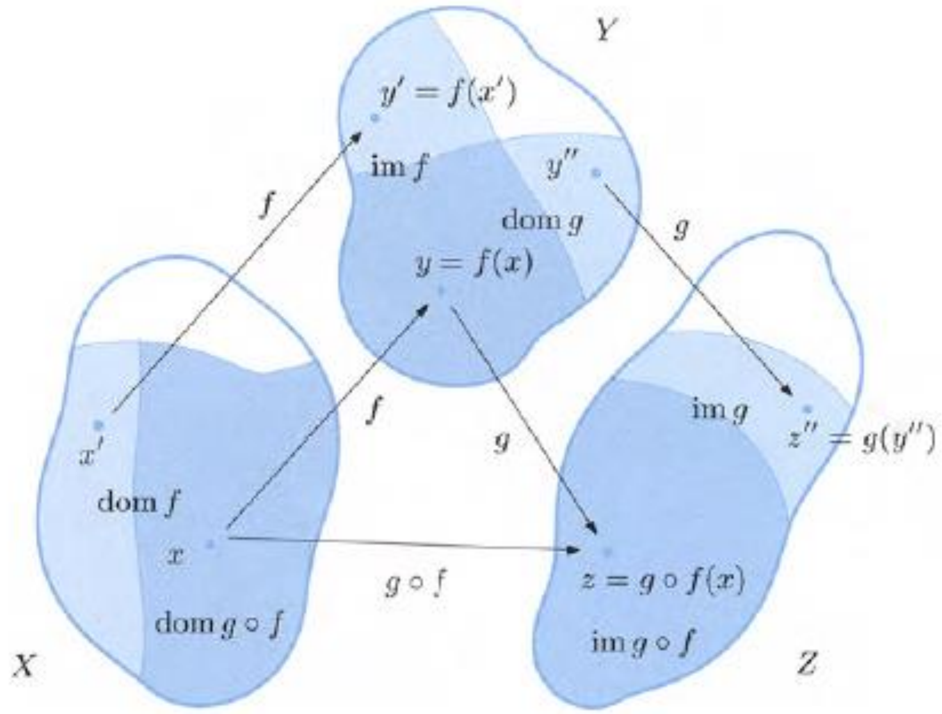
Kompozitsion $g\circ f$ funksiyaning aniqlanish sohasi $f$ funksiyaning aniqlanish sohasining qism to’plamidir.

**2.10 – misol**

I) Agar $y=\sqrt{u}$, $u=1-x^2$ bo‘lsa, u holda $y=\sqrt{1-x^2}$ funksiya [-1;1] da aniqlangan murakkab funksiya bo‘ladi.

II) Agar $y=\sqrt{1+u^2}$ va $u=lgx$ bo‘lsa, u holda $y=\sqrt{1+\lg^2 x}$ funksiya $(0;+\infty)$ da aniqlangan murakkab funksiya bo‘ladi.

III) $y=e^{x^2}$ funksiyani $u=x^2$ va $y=e^u$ funksiyalardan tuzilgan murakkab funksiya deb qarash mumkin.




**2.10- rasm.** Venn diagrammasi yordamida kompozitsion funksiyalarning tasvirlanishi

Agar $f$ va $g$ larning ikkalasi ham bir qiymatli (yoki ikkalasi ham biyektiv) funksiya bo'lsa $g \circ f$ kompozitsiya ham xuddi shu xossaga ega bo'lishligini tekshirish qiyin emas

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

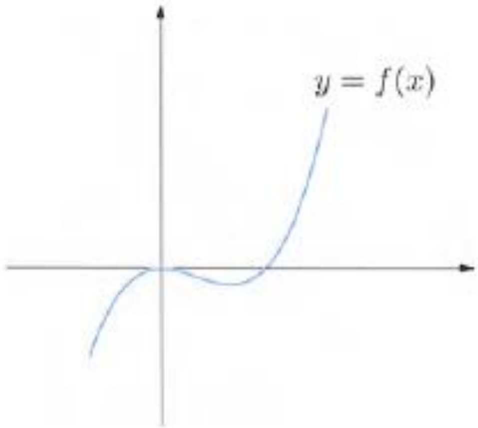
Bundan tashqari, agar $f$ va $g$ funksiyalar haqiqiy o'zgaruvchili monoton funksiyalar bo'lishsa, unda $g \circ f$ kompozitsion funksiya ham monoton bo'ladi, boshqacha qilib aytganda agar $f$ va $g$ funksiyalar o'suvchi(kamayuvchi) funksiyalar bo'lishsa, unda $g \circ f$ kompozitsion funksiya ham o'suvchi(kamayuvchi) bo'ladi.

Demak agar $f$ funksiya bir qiymatli(sodda) funksiya bo'lib uning teskari funksiyasi $f^{-1}$ bo'lsa, unda quyidagilar o'rinlidir:

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \qquad \forall x \in dom\, f,$$
$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = y, \qquad \forall y \in im\, f.$$

### 2.5.1 Funksiyani ko’chirish, siljitish, akslantirish.

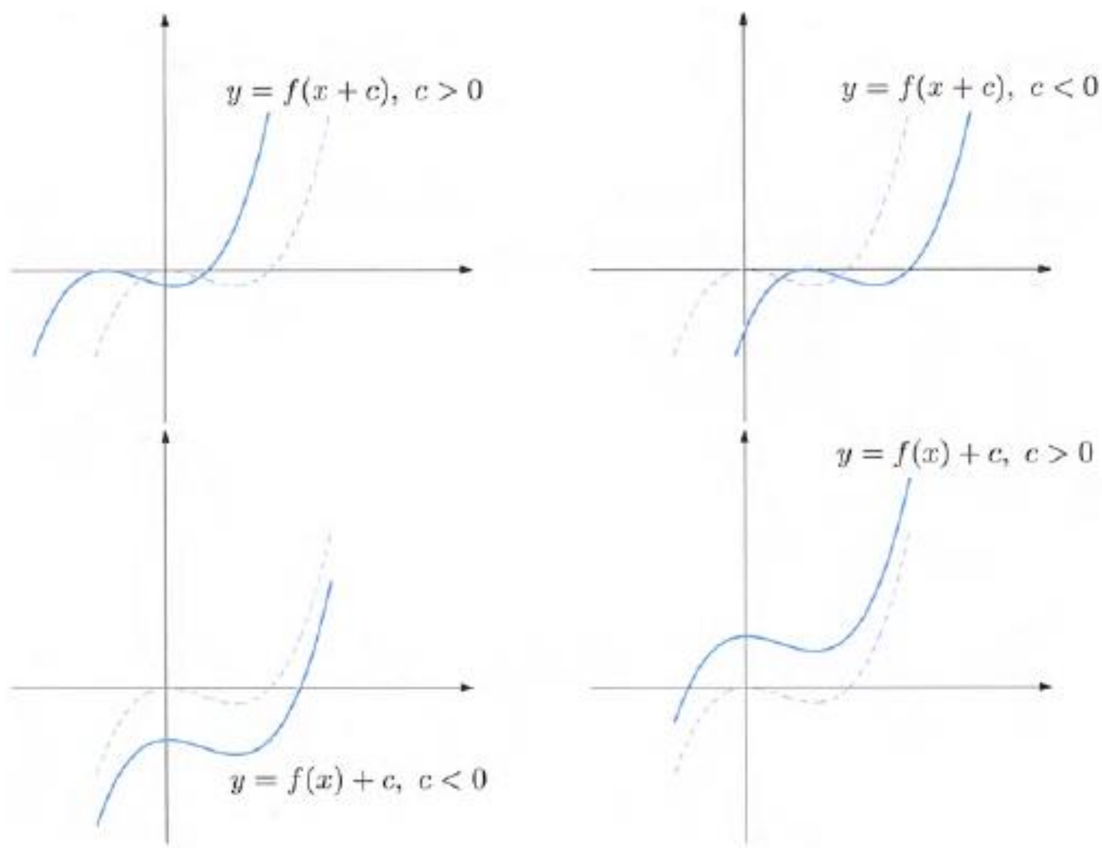
$f(x)$ - haqiqiy o’zgaruvchili funksiya bo’lsin(2.11 rasm).



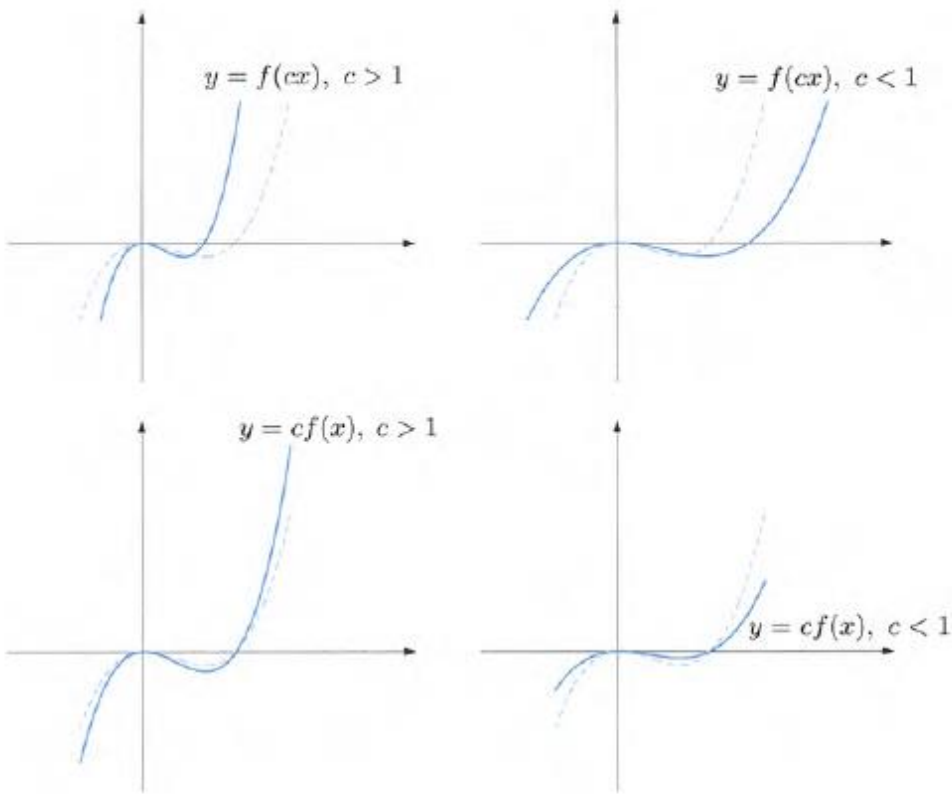

**2.11 Rasm.** $f(x)$ - funksiya grafigi

Biror $c \neq 0$ sonni olaylik, uni quyidagicha belgilaymiz $t_c : R \to R$ va $t_c(x) = x + c$. $f(x)$ funksiya grafigini **ko’chirish natijasida hosil bo’lgan yangi grafikning funksiyasi** $f \circ t_c(x) = f(x + c)$ bo’ladi. Agar $c > 0$ grafik chapga va aksincha $c < 0$ bo’lsa funksiya grafigi o’nga siljiydi. Xuddi shunday $t_c \circ f(x) = f(x) + c$ bo’lsa funksiya grafigi vertikalga nisbattan siljiydi. Agar $c > 0$ bo’lsa funksiya grafigi yuqoriga va aksincha $c < 0$ bo’lsa funksya grafigi pastga siljiydi. 2.12 rasm da bu holat aks etgan.

Yuqoridagi mulohazalarni davom ettirib, endi yana biror $c \neq 0$ sonni olaylik, uni quyidagicha belgilaymiz $s_c : R \to R$ va $s_c(x) = cx$ bo’lsin. $f(x)$ funksiya grafigini ko’chirish natijasida hosil bo’lgan yangi grafikning funksiyasi $f \circ s_c(x) = f(cx)$ bo’ladi. Bu funksiyaning $c > 1$ va $0 < c < 1$ hollar uchun, va xuddi shunday $t_c \circ f(x) = c \cdot f(x)$ funksiya grafigi 2.13 – rasmda koordinatalar o’qiga “yaqinlashishi” yoki koordinatalar o’qidan “qochishi” kuzatishimiz mumkin.




**2.12 - Rasm.** $f\left(x+c\right)$ funksiyaning grafigi ($c>0$ yuqoridan chapda, $c<0$ o'ngda), va $f\left(x\right)+c$ ($c<0$ pastdan chapda, $c>0$ pastdan o'ngda)




**2.12 - Rasm.** $f\left(cx\right)$ funksiyaning grafigi ($c>1$ yuqoridan chapda, $c<1$ o'ngda), va $c\cdot f\left(x\right)$funksiya grafigi ($c>1$ pastdan chapda, $c<1$ pastdan o'ngda)

## 2.6 Elementar funksiyalar va ularning xossalari

Bir qancha ta’riflarni keltirib o’tamiz

**2.11 - Ta’rif.** Agar ixtiyoriy $x \in X$ uchun $-x \in X$ bo‘lsa, u holda $X$ to‘plam *simmetrik to‘plam* ($O$ nuqtaga nisbatan) deyiladi. Aytaylik $f(x)$ funksiya $X$ simmetrik to‘plamda berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $x \in X$ uchun $f(-x) = f(x)$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ ***juft funksiya*** deyiladi. Agar ixtiyoriy $x \in X$ uchun $f(-x) = -f(x)$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ ***toq funksiya*** deyiladi.

Juft funksiyaning grafigi $Oy$ o’qiga nisbattan simmetrik bo’ladi. Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbattan simmetrik bo’ladi.

Funksiyalarning yana bir asosiy xossalaridan biri davriylik bo‘lib, ko‘pchilik bu tushunchani ishlatayotganda funksiyaning aniqlanish sohasiga e’tibor bermaydi. Biz, davriy funksiya tushunchasi o‘zining aniqlanish sohasi davriyligi bilan bog‘liq holda o‘rganilishi zarurligini ta’kidlab qo‘yamiz.

Aytaylik, $Y \subset \mathbb{R}$ to‘plam berilgan bo‘lsin.

**2.12- Ta’rif** Agar $l \neq 0$ va har bir $x \in X$ uchun $x-l \in X$ va $x+l \in X$ bo‘lsa, u holda $X$ ***davriy to‘plam*** va $l$ uning ***davri*** deyiladi. Davriy to‘plamning eng kichik davri uning ***asosiy davri*** deyiladi va agar $f(x+l)=f(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya ***davriy funksiya***, $l$ uning ***davri*** deyiladi.

Ta’rifdan ko‘rinadiki, $y=f(x)$ funksiya $l$ davrli davriy funksiya bo‘lishi uchun

a) uning aniqlanish sohasi bo‘lgan $X$ to‘plam $l$ davrli davriy to‘plam bo‘lishi,

b) ixtiyoriy $x \in X$ uchun $f(x+l)=f(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lishi kerak.

Agar shu shartlardan birortasi buzilsa, u holda $f(x)$ funksiya davriy funksiya bo‘lmaydi.

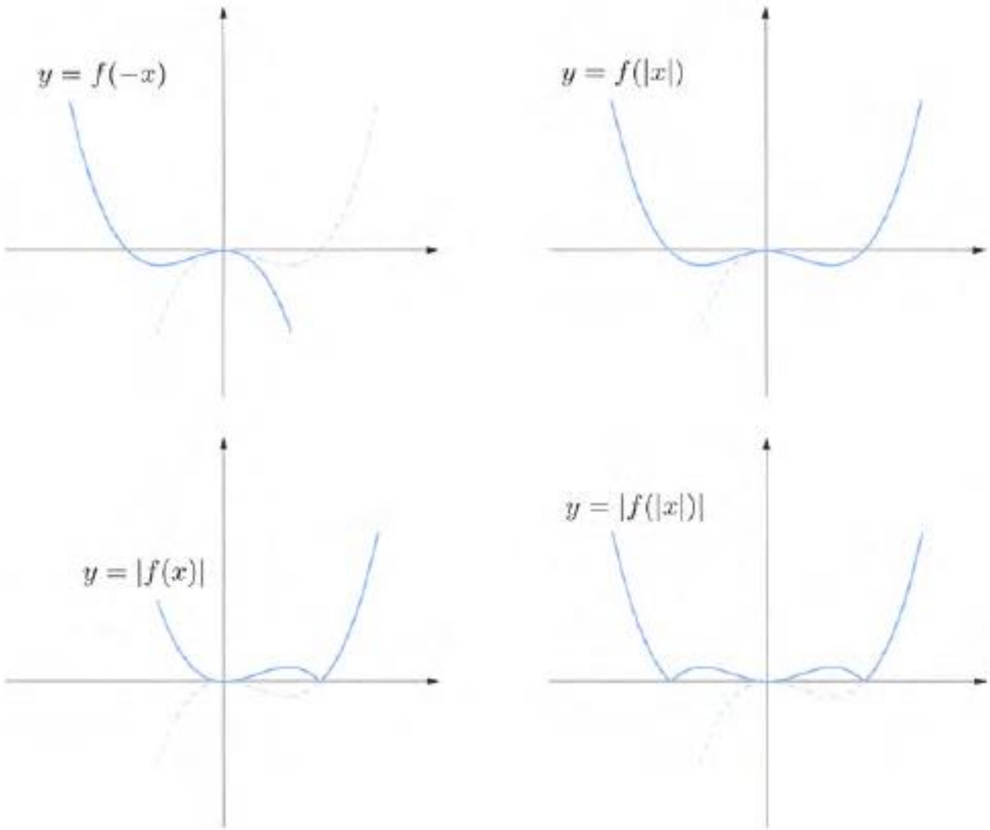


**Figure 2.14.** Clockwise: graph of the functions $f(-x)$, $f(|x|)$, $|f(|x|)|$, $|f(x)|$

**2.14 –Rasm.** Soat strelkasi bo'ylab: $f(-x),\ f(|x|), |f(|x|)|, |f(x)|$ funksiyalarning grafiklari.

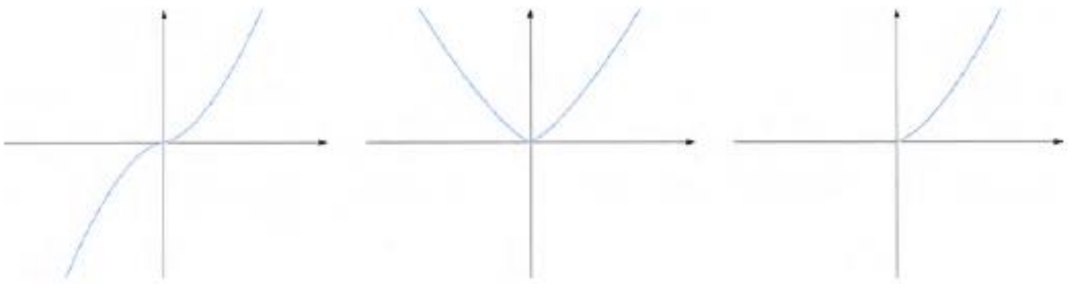
### 2.6.1 Darajali funksiyalar

Bu turdagi funksiyalar ko'rinishi $y = x^{\alpha}$ kabi bo'ladi. $\alpha = 0$ bo'lganda funksiya o'zgarmas bo'lib qoladi ya'ni $y = x^0 = 1$. Keling avval $\alpha > 0$ holni ko'rib chiqaylik. $\alpha = n \in N \setminus \{0\}$ lar uchun R da aniqlangan $y = x^n$ birhadga ega bo'lamiz, bu hol shu bo'limning 2.7- misolning II) va III) – misollarida o'rganilgan edi. n toq bo'lganda funksiya ham toq, n – juft son bo'lganda esa funksiya juft funksiya bo'ladi.

Endi $\alpha > 0$ ratsional bo'lsin. Agar $\alpha = \dfrac{1}{m}$ va $m \in N \setminus \{0\}$ bo'lsa, biz $m$ darajali ildiz funksiyaga $y = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$ ega bo'lamiz. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi musbat haqiqiy sonlar boshqacha qilib aytganda $[0, +\infty)$ oraliqdir.

Umumiy holda $\alpha = \dfrac{n}{m} \in Q,\ n,m \in N \setminus \{0\}$ bo'lsa, unda $y = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$ funksiyaga ega bo'lamiz. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi m toq bo'lganda barcha haqiqiy sonlar, m juft bo'ganda esa $[0,+\infty)$ oraliqda bo'ladi.

Keling bir nechta misollar keltiraylik(2.15-rasm). $y = x^{\frac{5}{3}}$ funksiya haqiqiy sonlar to'plami R da aniqlangan. $y = x^{\frac{4}{3}}$ funksiya ham $(-\infty,0]$da va $[0,+\infty)$da aniqlangan. $y = x^{\frac{3}{2}}$ esa faqatgina $[0,+\infty)$ oraliqda aniqlangan.

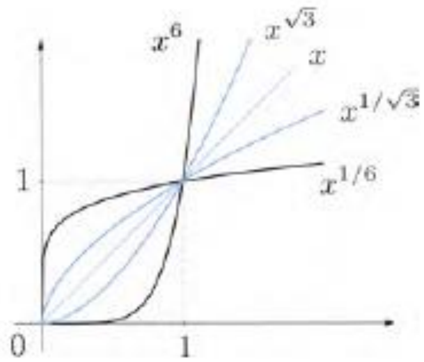


**2.15 – Rasm.** $y = x^{\frac{5}{3}}$(chapda) $y = x^{\frac{4}{3}}$(o'rtada) $y = x^{\frac{3}{2}}$(o'ngda) funksiya grafiklari.

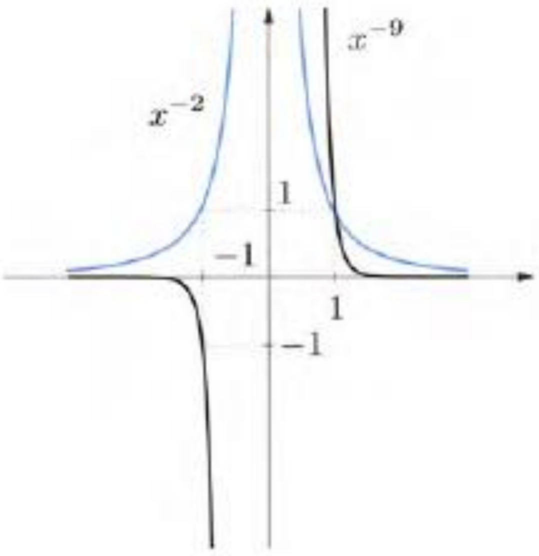
Nihoyat $y = x^{\alpha}$ funksiya har bir $\alpha > 0$ lar uchun aniqlangan ekan. Har qanday $\alpha > 0$ lar uchun doimo $y(0) = 0,\ y(1) = 1$ bo'ladi. Agar $\alpha < \beta$ bo'lsa quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\boxed{0 < x < 1, \ \text{uchun} \ 0 < x^{\beta} < x^{\alpha} < 1, \quad \text{va} \quad x > 1 \ \text{uchun} \ 1 < x^{\alpha} < x^{\beta},} \qquad (2.10)$$

(2.16 – rasmga qarang).




**2.16 – Rasm.** $x \geq 0$ va $\alpha > 0$ ning ba'zi qiymatlari uchun $y = x^{\alpha}$ funksiyaning grafigi.




**2.17- rasm.** $\alpha < 0$ dagi ikki hol uchun $y = x^{\alpha}$ funksiya grafigi.

Endi esa, $\alpha < 0$ holni ko'rib chiqamiz. $y = x^{\alpha} = \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$ funksiyaga ega bo'lamiz. Bu funksiya $y = x^{-\alpha}$ oldingi hollardan darajasidagi minus ishorasi bilan farqlanadi. 2.17 – rasmda bu funksiya grafigi keltirilgan. Har bir $\alpha \neq 0$ holat $y = x^{\alpha}$ funksiyaga $y = x^{\frac{1}{\alpha}}$ teskari funksiya aniqlanadi.

### 2.6.2 – Ko'phad va kasr ko'rinishidagi funksiyalar